

DOI: 10.16285/j.rsm.2022.0854

基于随机有限元法的波致海床响应概率分析

朱 彬^{1,2}, 裴华富³, 杨 庆³, 卢萌盟², 王 涛²

(1. 中国矿业大学 深部岩土力学与地下工程国家重点实验室, 江苏 徐州 221116;

2. 中国矿业大学 力学与土木工程学院, 江苏 徐州 221116; 3. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘 要: 波浪荷载作用下的海床响应是岩土工程领域的研究热点, 波致海床液化是导致海床及结构物失稳的主要原因。针对海床响应分析中涉及的诸多不确定性因素, 如沉积物参数的空间变异性以及荷载的随机性, 建立了基于随机有限元方法的概率分析框架, 将在 MATLAB 中实现的空间异质土体的模拟与在 COMSOL 中实现的孔隙弹性有限元分析通过 LiveLink 程序进行耦合。提出了一种分解的 Karhunen-Loève (简称 K-L) 展开方法, 该方法占用较少的计算时间和内存空间, 使得高分辨率、大尺寸的三维随机场的模拟更加高效。应用上述概率框架分别对规则波浪荷载作用下的二维倾斜海床以及随机波浪荷载下的三维海床响应进行了研究, 揭示了海床土体渗透系数 K 与剪切模量 G 的空间变异性以及波浪荷载随机性对孔隙水压力分布和海床液化深度的影响规律, 表明了传统确定性分析方法将导致不安全的工程设计。

关 键 词: 波浪荷载; 海床响应; 随机场; 空间变异性; 随机有限元法

中图分类号: TU 433

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2023) 05-1545-12

Probabilistic analysis of wave-induced seabed response based on stochastic finite element method

ZHU Bin^{1,2}, PEI Hua-fu³, YANG Qing³, LU Meng-meng², WANG Tao²

(1. State Key Laboratory for Geomechanics and Deep Underground Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou, Jiangsu 221116, China;

2. School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou, Jiangsu 221116, China;

3. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

Abstract: Wave-induced seabed response is a research hotspot in the field of geotechnical engineering. The wave-induced seabed liquefaction is the main reason for the instability of seabed and marine structures. In view of many uncertainties involved in the analysis of the seabed response, such as the spatial variability of sediment properties and the randomness of related loads, a probabilistic framework based on the stochastic finite element method is developed, which couples the simulation of spatially heterogeneous soil in MATLAB and the finite element analysis of poroelasticity in COMSOL through the LiveLink program. A decomposed K-L expansion method is proposed, which takes less computational time and memory space, making the generation of three-dimensional random fields with high resolution and large scale more effective. Based on the proposed probabilistic framework, the dynamic response of both the two-dimensional sloping seabed under regular waves and the three-dimensional seabed under random waves are studied. The influence of the spatial variability of the permeability coefficient K and shear modulus G of marine sediments and the randomness of wave loads on the distribution of pore water pressure and the liquefaction depth in the seabed are revealed. The study has shown that traditional deterministic analysis methods lead to unsafe engineering designs.

Keywords: wave loading; seabed response; random field; spatial variability; stochastic finite element method

1 引 言

随着近海风机、海洋平台等海工构筑物的建造,

合理评价海床稳定性是确保施工安全和保障海工构筑物长期服役的必要前提。研究表明, 导致海洋结构物失效的最主要原因是波浪引起的海床液化失

收稿日期: 2022-06-07

录用日期: 2022-10-25

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 52209150, No. 52178373); 中国博士后科学基金面上资助 (No. 2022M723403); 中央高校基本科研业务费专项资金 (No. 2022QN1026)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (52209150, 52178373), China Postdoctoral Science Foundation (2022M723403) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (2022QN1026).

第一作者简介: 朱彬, 男, 1991 年生, 博士, 讲师, 主要从事海床稳定性及可靠度方法相关研究。E-mail: binzhu@cumt.edu.cn

稳,而非结构的固有缺陷或施工因素^[1]。波致海床动力响应的相关研究已引起广泛关注,学者们采用了包括室内试验^[2-4]、解析方法^[5-7]和数值模拟等^[8-9]多种研究手段对这一问题进行了探讨。

Madsen^[10]和 Yamamoto 等^[6]在 20 世纪 70 年代就建立了基于 Biot 固结理论的波浪荷载作用下的多孔弹性海床模型。随后,国内外学者在该理论的基础上对波致海床响应及海床液化展开了进一步研究^[11-12]。除了水平海床,海洋基础有时需要建设在倾斜海床区域,如大陆架边缘。学者们也已应用数值方法对波浪荷载作用下倾斜海床响应展开了研究^[13]。除了规则波浪荷载下的海床响应及液化过程的预测与分析,鉴于真实海洋环境中的波浪荷载具有随机性这一事实, Liu^[14]、王小雯^[15]等学者已开展有关随机波浪荷载作用下海床土体响应的相关研究。

上述波致海床动力响应研究都是基于确定性分析方法,将海床模型中的土性参数视为常量或仅考虑其随深度坐标的均匀变化或成层分布^[16],未考虑其随机性和空间变异性^[17-18]。海床动力响应涉及许多复杂因素和不确定性,且潜在的破坏机制尚未得到充分揭示。因此,应尝试使用概率框架对波浪荷载下的海床响应及其稳定性进行评价。随着随机场理论在模拟土体特性方面的发展,近年来人们开始尝试使用随机有限元模型来研究波浪引起的空间异质海床动力响应^[19-20],但是对于三维随机有限元方法的应用仍然较少^[21]。针对三维空间异质海床的高效建模方法,以及综合考虑波浪荷载随机性的随机有限元框架有待于进一步开发和完善。文献^[19]仅进行了规则波浪荷载作用下二维水平海床的动力响应随机分析。本研究在此基础上,结合波浪在缓坡上的传播规律与土性参数随机场理论,研究了二维非均质倾斜海床中孔隙水压力和有效应力的分布;进一步地,探究了随机波浪荷载作用下三维空间异质海床的响应规律。

针对现有研究的不足,本文提出了分解的 Karhunen-Loève (简称 K-L) 展开方法对三维随机场进行离散,并对其精度和效率进行了验证。基于 MATLAB 建立土性参数随机场,基于 COMSOL 平台构建多孔弹性海床模型,并通过 LiveLink 程序进行交互,构建了基于随机有限元法的概率框架。基于以上概率框架,首先对规则波浪作用下的倾斜海床动力响应进行概率分析,研究了海洋沉积物参数空间变异性对概率分析结果的影响。在三维空间异质海床响应分析中,考虑了波浪荷载的随机性,研

究了空间异质海床中液化区深度的统计规律。研究结果表明了概率方法以及考虑土性参数空间变异性在工程设计中的重要意义。

2 基于随机有限元的概率分析框架

2.1 基于 K-L 展开的随机场离散方法

本文中随机场由 K-L 展开方法进行离散。K-L 展开是一种基于自相关函数谱分解的级数展开方法。与其他级数展开方法相比,该方法达到相同的精度水平需要更少的展开项^[22],且该方法简单易用,在模拟平稳和非平稳随机场以及高度相关联的随机场时具有优势。

在考虑土性参数空间变异性的岩土工程可靠度分析中,空间变量常由平稳随机场来模拟,此时变量的均值和标准差都不随地层深度变化^[23]。具有均值 μ^* 、标准差 σ^* 和已知自相关函数的平稳高斯随机场 $\tilde{H}(x, \theta)$ 可以由 K-L 展开表示为

$$\tilde{H}(x, \theta) = \mu^* + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^* \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(x) \xi_i(\theta) \quad (1)$$

式中: x 为离散点的坐标; $\xi_i(\theta)$ 为一组均值为 0、标准差为 1 的互相独立随机变量, θ 代表随机事件; λ_i 和 $\varphi_i(x)$ 分别为自相关函数的特征值和特征函数,可以通过求解第 2 类齐次 Fredholm 积分方程获得,其中特征函数需满足下式的正交条件:

$$\int_D \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (2)$$

式中: i 、 j 均为特征函数的序号; δ_{ij} 为 Kronecker 函数。在实际应用时, K-L 展开通常截断为前 N 项,其中特征对按特征值由大到小降序排列,截断项数决定了随机场的离散精度。

若土性参数的统计特征不服从高斯分布,则需要利用非高斯随机场来模拟其空间变异性^[24]。在概率分析中,常将土体参数的分布视为对数正态分布,以避免出现负值。针对土性参数统计特征服从对数正态分布的情况,土体参数对数化后的标准差 $\sigma_{\ln}$ 和均值 $\mu_{\ln}$ 如下所示:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\ln} &= \sqrt{\ln[1 + (\sigma^* / \mu^*)^2]} \\ \mu_{\ln} &= \ln \mu^* - \sigma_{\ln}^2 / 2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

对高斯随机场进行指数化运算以获得土体参数的对数正态随机场 $\tilde{H}'(x, \theta)$:

$$\tilde{H}'(x, \theta) = \exp \left[\mu_{\ln} + \sum_{i=1}^N \sigma_{\ln} \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(x) \xi_i(\theta) \right] \quad (4)$$

通常假设同一区域中互相关的随机场拥有相同的自相关函数。因此,谱分解仅需进行一次,相同的特征对可用于互相关的随机场模拟。本文中使

用 Cholesky 分解来生成互相关的随机场。

由 K-L 展开方法生成随机场的关键是确定自相关函数的特征对。对于单指数自相关函数，可以求得特征对的解析解，但是对于其他多数自相关函数，积分方程无解析解，此时常使用数值方法获得特征对。大多数数值方法将积分方程问题转换为代数特征值问题，对于离散随机场，代数方法大大减少了计算量。本文中，特征对通过自相关矩阵的特征分解获得

$$\mathbf{C} = \Phi \mathbf{A} \Phi^{-1} \quad (5)$$

式中： $\mathbf{A}$ 为初始特征值矩阵； $\mathbf{C}$ 为自相关矩阵，其元素由自相关函数和位置坐标确定； Φ 为初始特征函数矩阵，其中每一列都是初始特征向量 Φ_i ，即

$$\Phi = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_N] \quad (6)$$

$\mathbf{A}$ 对角线上的元素为初始特征值 A_i ，即

$$\mathbf{A} = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_N] \quad (7)$$

考虑到需满足方程式 (2) 中的正交条件，要对获得的初始特征向量 Φ_i 进行归一化，初始特征值 A_i 也需要相应加权，可表示为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= A_i \cdot \Delta x \\ \varphi_i(x) &= \frac{\Phi_i(x)}{\sqrt{\int_D \Phi_i(x)^2 dx}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中： Δx 为离散随机场的单元尺寸。

2.2 分解的 K-L 展开法

近年来，土性参数的二维随机场离散方法得到了较好的推广和应用，但是三维随机场由于计算效率较低，其应用仍旧非常有限。针对大尺寸、精细化、高维度随机场模拟中计算时间较长、占用内存较大的问题，本文提出了一种逐步分解的 K-L 展开方法，主要针对具有可分离自相关函数的三维随机场的生成。该方法受到 Li 等^[25]提出的用于协方差矩阵分解的逐步程序的启发。在本研究中，可以将三维随机场的生成分解为 3 个方向上独立的一维随机场的生成，并分别由 2.1 节所述 K-L 展开方法实现。

常规 K-L 展开方法对于多维随机场的生成通常并不适宜，因为如 2.1 节所述，为获得自相关矩阵的特征对需要对积分方程求解。对于多维特征值问题，由于对计算机存储和计算性能要求极高，即使是数值解也很难获得。较高的计算负担主要体现在：①存储自相关矩阵所需的大量物理内存空间；②对于大尺寸模型或精细模型在自相关矩阵分解时需要耗费大量的计算时间。本文提出的方法将三维

随机场自相关矩阵的特征对求解分解为 3 个方向上一维随机场特征对的求解，以减少内存占用，提高计算效率。

本文提出的分解 K-L 方法适用于具有可分离的自相关函数的情况。可分离的自相关函数可以表示为各方向上一维自相关函数 $\rho(\tau_x)$ 、 $\rho(\tau_y)$ 、 $\rho(\tau_z)$ 的乘积，计算公式为

$$\rho(\tau_x, \tau_y, \tau_z) = \rho(\tau_x) \rho(\tau_y) \rho(\tau_z) \quad (9)$$

式中： τ_x 、 τ_y 和 τ_z 分别为 x 、 y 、 z 方向上任意两个位置点之间的距离。最常用的自相关函数，即单指数和平方指数自相关函数都是可分离的，可以分别表示如下：

$$\left. \begin{aligned} \rho(\tau_x, \tau_y, \tau_z) &= \exp \left[-\frac{|\tau_x|}{l_x} - \frac{|\tau_y|}{l_y} - \frac{|\tau_z|}{l_z} \right] \\ \rho(\tau_x, \tau_y, \tau_z) &= \exp \left[-\left(\frac{\tau_x}{l_x} \right)^2 - \left(\frac{\tau_y}{l_y} \right)^2 - \left(\frac{\tau_z}{l_z} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中： l_x 、 l_y 和 l_z 分别为 x 、 y 和 z 方向上的相关距离。

给定统计参数和相关结构，由截断的 K-L 展开方法离散随机场的具体步骤详见第 2.1 节。可以通过在 MATLAB 程序中进行矩阵运算来实现随机场的 K-L 展开，计算公式为

$$\mathbf{H} = \sigma^* \mathbf{F} \mathbf{V} \mathbf{W} + \mathbf{M} \quad (11)$$

式中： $\mathbf{H}$ 为尺寸为 $m \times 1$ 的离散随机场的数组； $\mathbf{F}$ 为特征函数的矩阵； $\mathbf{W}$ 为尺寸为 $N \times 1$ 的标准随机数向量； $\mathbf{M}$ 为 $m \times 1$ 维向量； m 为随机场中的网格点数，在三维随机场中 $m = m_x \times m_y \times m_z$ ，其中 m_x 、 m_y 和 m_z 分别是 x 、 y 、 z 方向上的网格点数； $\mathbf{V}$ 为 $N \times N$ 阶矩阵，对角线中的元素是按降序排列的特征值的平方根，表示为

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_N} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$\mathbf{F}$ 尺寸为 $m \times N$ ：

$$\mathbf{F} = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_N] \quad (13)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix} \quad (14)$$

$\mathbf{M}$ 中每个元素都为随机场模拟参数的平均值 μ^* 。

三维随机场的自相关矩阵通常尺寸较大 ($m_x m_y m_z \times m_x m_y m_z$)，对于大尺寸精细化的模型，自相关矩阵的直接特征分解将需要非常大的存储空间，这常常超出了台式电脑的物理存储。本文方法绕开了直接对三维空间中自相关矩阵的分解，可在单独的维度上进行 K-L 展开。对于可分离的自相关函数，可以证明对应的自相关矩阵 $\mathbf{C}$ 也是可分离的：

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_z \otimes \mathbf{C}_x \otimes \mathbf{C}_y \quad (15)$$

式中： $\mathbf{C}_x$ 、 $\mathbf{C}_y$ 和 $\mathbf{C}_z$ 为分解后的一维随机场的自相关矩阵；“ $\otimes$ ”符号表示矩阵之间的 Kronecker 乘积运算，其是张量积的特殊形式，根据 Kronecker 乘积的性质可知，对于可分离的自相关矩阵，特征值和特征函数矩阵也可分离：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}_z \otimes \mathbf{V}_x \otimes \mathbf{V}_y \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}_z \otimes \mathbf{F}_x \otimes \mathbf{F}_y \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中： $\mathbf{V}_x$ 、 $\mathbf{V}_y$ 、 $\mathbf{V}_z$ 为分解后一维随机场的特征值矩阵； $\mathbf{F}_x$ 、 $\mathbf{F}_y$ 、 $\mathbf{F}_z$ 为分解后的特征函数矩阵。定义矩阵 $\mathbf{B}$ ：

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{V} \quad (17)$$

等式 (11) 可表示为

$$\mathbf{H} = \sigma^* \mathbf{B}\mathbf{W} + \mathbf{M} = \sigma^* (\mathbf{B}_z \otimes \mathbf{B}_x \otimes \mathbf{B}_y) \mathbf{W} + \mathbf{M} \quad (18)$$

其中：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_x &= \mathbf{F}_x \mathbf{V}_x \\ \mathbf{B}_y &= \mathbf{F}_y \mathbf{V}_y \\ \mathbf{B}_z &= \mathbf{F}_z \mathbf{V}_z \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

因此，可分别单独求解 x 、 y 、 z 方向上一维随机场的特征对，然后将一维空间中的结果通过 Kronecker 乘积相乘，以获得三维空间结果。此外，对于三维互相关和非高斯随机场，上述方法也可容易地与 Cholesky 分解和等效正态化方法结合使用。

2.2.1 精度验证

为了验证本文分解 K-L 展开方法对于三维随机场的离散精度，选取如下三维随机场验证案例：空间随机参数 V_n (无量纲化) 设为对数正态分布，自相关函数为单指数型，3 个方向的自相关长度分别设为 $l_x = l_y = 10$ m， $l_z = 5$ m。使用本文所提出的分解 K-L 展开方法进行三维随机场离散，随机场的一次典型实现如图 1 所示。对随机场中参数统计特征的验证如图 2 所示，对离散随机场中空间不同位置处

参数进行抽样统计，最终获得的参数频数分布图与用于随机场离散的真实概率密度曲线吻合较好，证明了该方法生成的随机场可以很好地再现空间参数的统计特征。

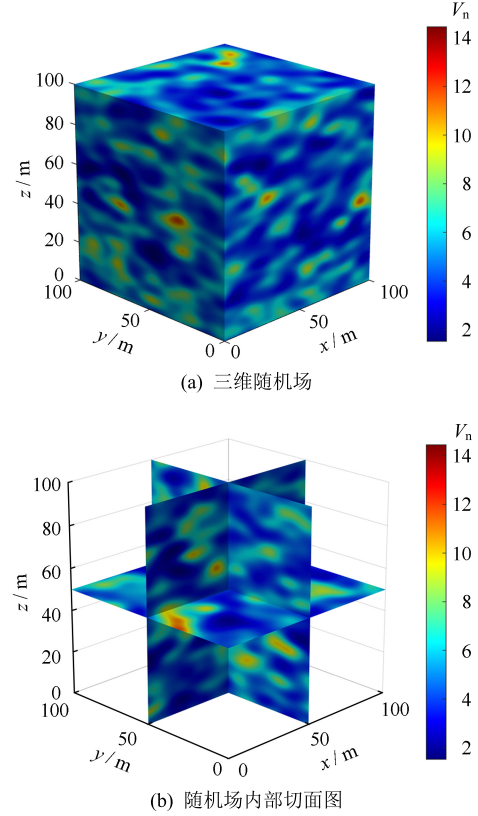


图 1 验证案例中三维随机场的一次典型实现
Fig.1 One typical simulation of 3D random field in the case for validation

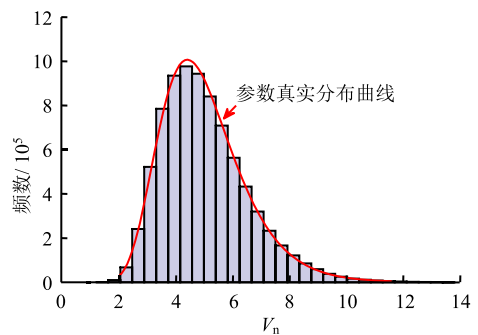
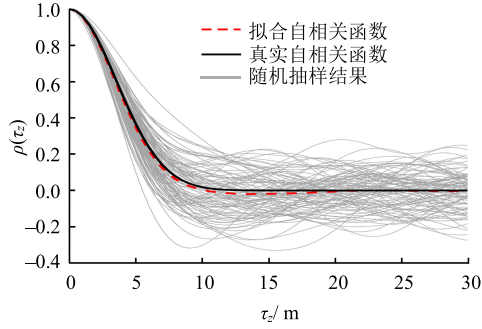
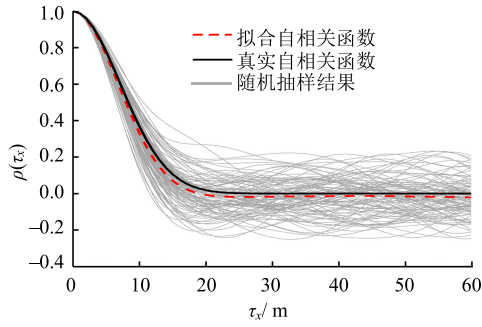


图 2 空间分布参数的统计特征验证
Fig.2 Validation of statistical characteristics of spatially distributed parameter

对离散随机场的自相关结构特征进行了验证，沿三维随机场水平及垂直方向分别取样，评估其自相关结构。如图 3 可知，从离散随机场中取样拟合的自相关函数与用于随机场生成的真实自相关函数吻合较好，证明了本文方法所离散的随机场能够很好地再现随机场的水平及垂直相关结构特征。



(a) 垂直方向自相关函数验证



(b) 水平方向自相关函数验证

图3 空间分布参数的相关结构验证

Fig.3 Validation of correlation structure of parameter

2.2.2 效率验证

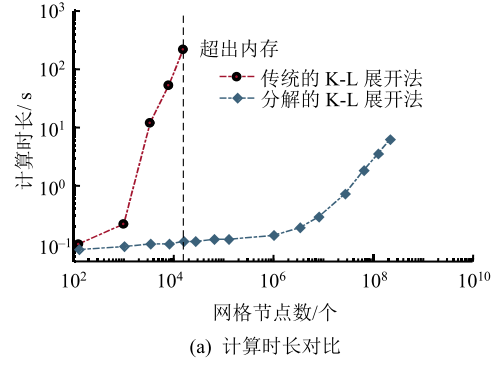
为了进一步验证所提出的分解的 K-L 展开方法的计算效率,对该方法与传统 K-L 展开法的耗时和内存占用进行了对比。在对比案例中,使用了单指数型自相关函数,相关距离设为 $[l_x, l_y, l_z] = [10 \text{ m}, 10 \text{ m}, 5 \text{ m}]$ 。三维随机场模型几何尺寸设为 $(5 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 5 \text{ m})$ 至 $(600 \text{ m} \times 600 \text{ m} \times 600 \text{ m})$ 。3 个方向上的随机场网格间距均设为 1 m , 因此离散随机场的节点数为 $125 \sim 2.16 \times 10^8$ 。使用桌面计算机 (3.60 GHz i9-10850K Core CPU; 32GB RAM) 生成各组不同尺寸随机场所用计算时间以及物理内存占用情况如图 4 所示。当使用传统 K-L 展开方法生成节点数超过 $(25 \times 25 \times 25)$ 的随机场时,电脑会超出内存,无法继续运算。由图可知,本文所提出的分解的 K-L 展开方法极大地减少了计算时长和内存占用,使得大尺寸、精细化、高维度的随机场生成更加高效。

2.3 多孔弹性海床模型

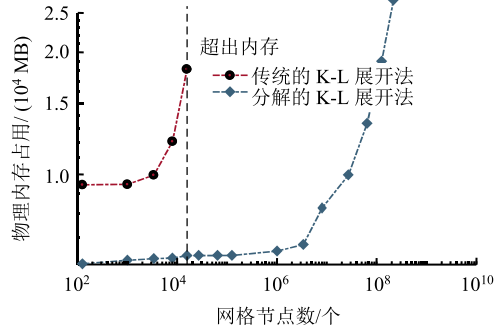
本文基于 Biot 理论建立多孔弹性海床的有限元模型,其中遵循胡克定律的弹性土骨架与遵循达西定律的可压缩孔隙水相互耦合。

2.3.1 控制方程

三维多孔弹性海床模型中土-水相互作用的控制方程可以表示为



(a) 计算时长对比



(b) 物理内存占用对比

图4 本文方法与传统 K-L 展开方法计算时间和所需内存空间的对比

Fig.4 Comparisons of computational time and required memory space between the proposed method and traditional K-L expansion method

$$\frac{K}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) - n' \beta_w \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (20)$$

式中: K 为土体的渗透系数; γ_w 为孔隙水的重度; p 为波浪引起的孔隙水压力; β_w 为孔隙水的压缩系数; n' 为土体孔隙率。土体的体积应变 ε 可表示为

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (21)$$

式中: u 、 v 和 w 分别为土体在 x 、 y 和 z 方向上的位移。 β_w 可以表示为

$$\beta_w = \frac{1}{K_w} + \frac{1 - S_r}{P_{w0}} \quad (22)$$

式中: K_w 为水的真实体积模量, 取为 $1.95 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; S_r 为土体饱和度; 绝对孔隙水压力 P_{w0} 可以通过 $P_{w0} = \gamma_w d$ 进行计算, 其中 d 为水深。多孔弹性土体的受力平衡方程表示为

$$\left. \begin{aligned} G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\mu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\mu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\mu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式中: G 为土体剪切模量; μ 为泊松比。

2.3.2 边界条件

在海床表面, 垂直有效应力 σ'_z 和剪应力 τ'_{xz} 、 τ'_{yz} 为 0 ($\sigma'_z = \tau'_{xz} = \tau'_{yz} = 0$), 孔隙水压力等于沿海床表面分布的波浪力。模型的底部假设为不透水的刚性边界, 土体位移为 0, 垂向方向孔压梯度为 0 ($u = v = w = \partial p / \partial z = 0$)。对于规则波浪荷载下的水平均质海床模型, 其侧边界可以使用周期边界条件, 模型计算域的几何长度可以截取为波长长度的整数倍。然而, 对倾斜海床而言, 情况要更加复杂, 因为在两个侧边界上的场变量的取值不同。本研究中斜坡模型的两侧边界条件参考了 Rafiei 等^[13]的研究, 为简化计算, 假设侧边界上无水平方向的位移和孔压梯度 ($w = \partial p / \partial x = 0$)。为了减少侧边界的假设对模型中部区域的影响, 选取了足够大的模型计算区域。对于三维水平海床案例, 模型中应用了无限单元来定义边界, 因此无需选取较大的计算区域来减小边界条件的影响, 极大地提高了计算效率。

2.3.3 液化准则

本文采用由 Zen 等^[3]提出并由 Liu 等^[14]修改的海床土体瞬时液化准则, 该准则可表示为

$$-\frac{1}{3}(\gamma_s - \gamma_w)(1 + 2K_0)z \leq -[P - p(z)] \quad (24)$$

式中: P 为海床表面波浪压力; γ_s 为土体重度; K_0 为静止土压力系数, 其与泊松比的关系可以表示为

$$K_0 = \frac{\mu}{1 - \mu} \quad (25)$$

本文使用 COMSOL 建立多孔弹性海床的有限元模型, 其中耦合了模拟土骨架的固体力学模块与模拟孔隙水的达西定律模块以进行孔隙弹性分析。为了验证本文中使用的数值模型, 将波浪荷载作用下均质海床响应的数值计算结果与文献[7]中的解析解以及水槽试验^[4]结果进行了对比。密砂和松砂中波致孔隙水压力的试验数据以及对应的解析解和数值结果如图 5 所示。对比结果证实本研究使用的数值方法与试验结果和解析解均吻合较好。

2.4 基于 LiveLink 的耦合方法

LiveLink for MATLAB^[26]是 COMSOL 平台的附属软件, 可将 COMSOL 与 MATLAB 脚本环境联系起来。基于 LiveLink 可在 MATLAB 界面通过编写代码流控制仿真的操作, 进而实现 MATLAB 和 COMSOL 之间的交互。其优势在于可使用 MATLAB 函数来设置模型的属性以及可通过脚本文件执行嵌套循环。本文通过编写 LiveLink 程序, 将在 MATLAB 中生成的土性参数随机场及波浪荷载边界条件与在

COMSOL 中进行的有限元分析耦合在一起。LiveLink 程序中还实现了具有大量迭代的 Monte Carlo 模拟 (Monte Carlo Simulation, 简称 MCS) 循环算法, 可以自动执行成百数千次随机有限元分析。图 6 所示为本程序的整个计算框架流程图。首先, 将用于生成波浪荷载和空间变异土体的基本参数输入到 MATLAB 中, 进行土体参数的随机场离散以及波浪荷载的生成; 然后, 将土性参数随机场与波浪荷载边界条件由 LiveLink 代码导入 COMSOL 中的有限元模型, 因此可以在数值模型中充分考虑波浪荷载的随机性与土体参数的空间变异性; 最后, 计算获得随机有限元分析的结果, 并将其输出到文本文件中, 输出结果

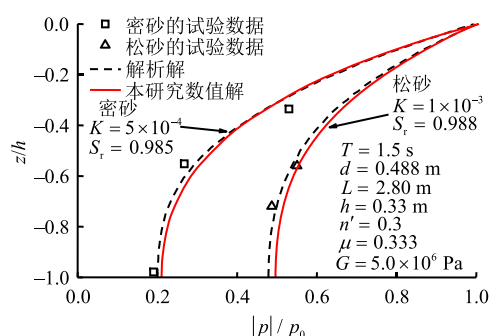


图 5 数值模型获得的孔隙水压力与解析解和水槽试验结果的对比

Fig.5 Comparison of pore water pressure obtained from numerical model with analytical solution and experimental data

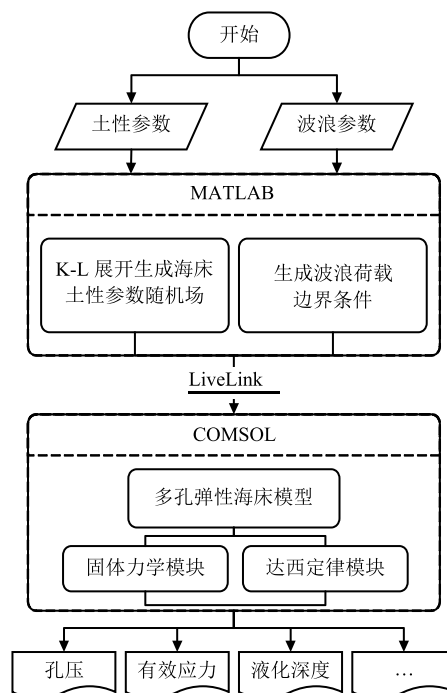


图 6 多孔弹性海床的随机有限元计算流程图

Fig.6 Flowchart to show calculation procedure of stochastic finite element analysis for a poroelastic seabed

包括有效应力、孔隙水压力和瞬时液化特征。这些输出文件可以再次导入 MATLAB 中进行进一步的概率分析。重复上述步骤以进行 MCS, 得到海床响应的统计特征。

3 二维倾斜海床随机分析

首先针对倾斜海床开展概率分析, 为了简化计算, 在该章节中应用了二维随机有限元模型结合规则波浪荷载。根据线性波理论, 规则波浪荷载作用下, 海床表面的水动力压力可以表示为

$$P(x, t) = p_0 \cos(kx - \omega t) = \frac{\gamma_w H}{2 \cosh(kd)} \cos(kx - \omega t) \quad (26)$$

式中: p_0 为波压的幅值; k 为波数, 可以通过 $k = 2\pi/L$ 来计算, 其中 L 为波长。式 (26) 中的 ω 表示波频率, t 为时间, H 为波高。波参数应当满足以下波散方程:

$$\omega^2 = gk \tanh(kd) \quad (27)$$

式中: g 为重力加速度。

在本研究中, 考虑了当波浪从相对较深的水域传播到较浅的水域时波长和波高的变化, 这意味着式 (26) 中的 H 、 k 和 d 随位置变化, 而非定值。假设能量反射和耗散的速率可以忽略不计, 即任意两连续点之间遵循能量守恒, 则在水深 d 位置处的波高可以通过以下公式求得

$$H = H_0 \sqrt{\frac{2[\cosh(kd)]^2}{2kd + \sinh(2kd)}} \quad (28)$$

式中: H_0 为深水区域的波高。根据波浪参数及式 (28) 计算得到波浪荷载的时空分布作为随机有限元的上边界。

3.1 海床响应概率分析

在本节中, 对一个具有空间变化土性参数的多孔弹性倾斜海床算例进行概率分析。案例中由随机场模拟海洋沉积物的渗透系数 K 和剪切模量 G 的空间变异性。剪切模量 G 与渗透系数 K 之间存在负相关性, 这主要是由于参数 G 和 K 都与砂土的孔隙率相关, 当孔隙率下降, 土体将更密实, 此时土体的渗透性将减小而剪切模量将增大^[20]。本研究考虑这两个属性之间的互相关性, 互相关系数取为 -0.5 , 水平和垂直方向上随机场的相关距离分别取为 40 m 和 3 m 。Zhang 等^[19]和 Peng 等^[20]对现场获得的海洋土性参数的相关距离进行了统计归纳, 并建议 G

和 K 的垂直相关距离取值范围为 $0.1 \sim 10 \text{ m}$, 水平相关距离一般比垂直相关距离大一个数量级。本文相关距离的选取在文献[19-20]推荐的取值范围内。表 1 列出了该多孔弹性倾斜海床模型中取为常量的参数, 表 2 列出了用于随机场模拟的参数。 G 和 K 均假设服从对数正态分布。Zhang 等^[19]和 Peng 等^[20]通过总结归纳, 推荐渗透系数 K 的变异系数取值范围为 $60\% \sim 200\%$, 剪切模量 G 的变异系数取值范围为 $20\% \sim 100\%$; Lai 等^[27]以及 Phoon 等^[28]推荐 G 的变异系数范围为 $15\% \sim 95\%$ 。本研究使用的变异系数均在文献推荐的取值范围内。模型的几何形状、边界条件及剪切模量随机场的一次典型实现如图 7 所示。案例中坡角设为 10° , 模型中轴处的水深和沉积物厚度分别为 20 m 和 40 m 。

表 1 多孔弹性倾斜海床概率分析中取为常量的参数
Table 1 Constant parameters used for poroelastic sloping seabed in the probabilistic analysis

周期 T / s	深水区域波 高 H_0 / m	水的密度 ρ_w / ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	土体密度 ρ_s / ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	泊松比 μ	孔隙率 n'	饱和度 S_r
12	6	1 000	1 500	0.3	0.35	0.95

表 2 多孔弹性倾斜海床概率分析中空间变异参数
Table 2 Spatially variable parameters used for poroelastic sloping seabed in the probabilistic analysis

剪切模量 G			渗透率 K	
分布类型	均值 / Pa	变异系数 COV	分布类型	均值 / ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
对数正态	1.0×10^7	0.5	对数正态	1.0×10^{-4}
				变异系数 COV
				0.7

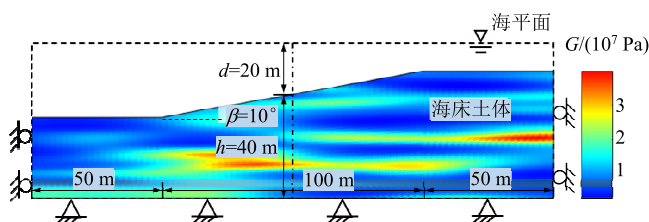


图 7 二维倾斜海床几何形状及 G 的随机场一次生成
Fig.7 Geometric graphic of the 2D sloping seabed and one simulation of the random field of G

进行 500 次抽样的 MCS, 分析该多孔弹性倾斜海床响应的统计特征。斜坡模型中轴处沿深度分布的最大归一化垂直有效应力和孔隙水压力的统计特征和相应的不确定性如图 8 所示。概率分析结果的平均值用实线标记, 相应均质斜坡模型的确定性分析结果用虚线标记。可以看出, 就垂直有效应力而言, 确定性分析获得的结果比概率分析获得的平均值大。就孔隙水压力而言, 则相反, 确定性分析所获得的结果小于概率分析所获得的平均值。

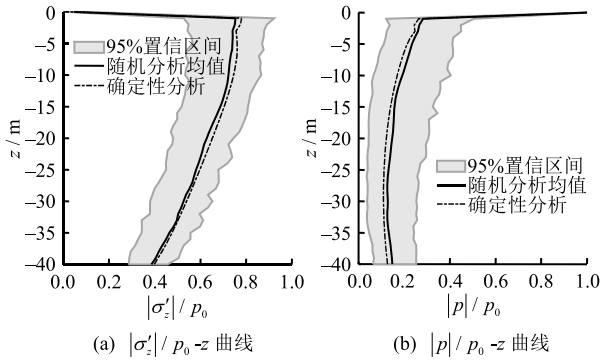


图8 斜坡模型中轴处沿深度分布的最大归一化垂直有效应力和孔隙水压力的统计特征和相应的不确定性

Fig.8 Statistics and corresponding uncertainties of the maximum normalized vertical effective stress and pore water pressure along depth in the center of slope model

MCS 中依据液化准则获得的海床液化区域深度和宽度的统计直方图如图9所示,随机分析的平均值以及确定性分析的结果标注如图9所示。显然,通过概率分析获得的多孔弹性倾斜海床液化区的平均深度和宽度均要略小于通过确定性分析所获得的结果。Peng 等^[20]的研究也表明,在水平空间异质海床中的液化深度有相同的统计规律。

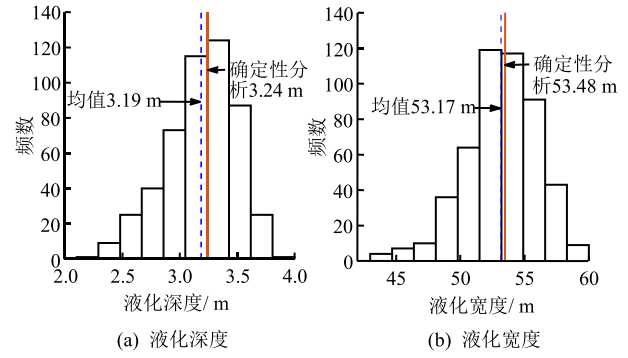


图9 瞬时液化区深度和宽度的统计直方图

Fig.9 Histograms of liquefaction depths and widths

3.2 参数空间变异性的影响

本节讨论 G 和 K 的空间变异性对多孔弹性倾斜海床动力响应的影响。在随机有限元模型中,考虑以下两种情况:①仅考虑 G 的空间变异性,将 K 视为常数;②仅考虑 K 的空间变异性,将 G 视为常数。MCS 的结果如图10所示。由图可知, K 的空间变异性对概率分析的结果影响很小,仅影响浅层土的反应,而 G 的空间变异性显著影响整个海床的孔隙水压力 and 有效应力分布。Peng 等^[20]和 Zhang 等^[19]的研究也表明,对于水平空间异质海床有相同的规律。

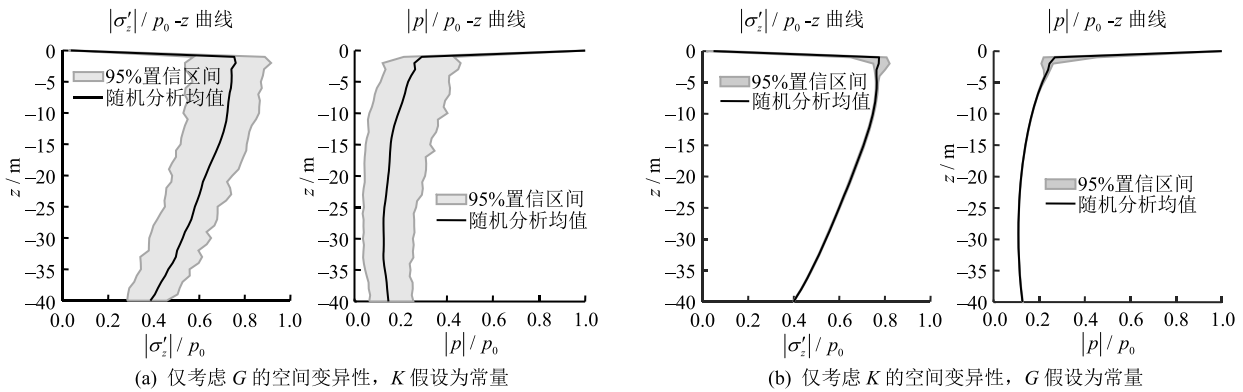


图10 参数空间变异性对随机分析结果的影响

Fig.10 Effects of spatial variability of soil parameters on the results of stochastic analysis

4 三维空间异质海床响应

4.1 三维随机波浪荷载

在本节中,除考虑海床土体的三维空间变异性外,还考虑波浪荷载的随机性。随时间变化的海面高程通常被认为是平稳高斯随机过程,可通过对波浪谱确定的一系列分量波进行叠加得到。JONSWAP 谱是在海洋结构设计和分析中常用的波浪频谱^[29],其可以通过谱峰周期 T_p 、有效波高 H_s 和峰升因子 γ 来表示:

$$S(\omega) = \alpha_s g^2 \omega^{-5} \exp \left[-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^4 \right] \gamma \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_p)^2}{2\sigma^2 \omega_p^2} \right] \quad (29)$$

$$\alpha_s = 5.061 \frac{H_s^2}{T_p^4} (1 - 0.287 \ln \gamma) \quad (30)$$

$$\sigma = \begin{cases} 0.07, \omega \leq \omega_p \\ 0.09, \omega > \omega_p \end{cases} \quad (31)$$

式中: ω_p 为峰值频率,可以通过 $\omega_p = 2\pi / T_p$ 计算得到; $S(\omega)$ 为频谱函数; α_s 为无因次系数; σ 为峰形系数。

仅使用频率谱不足以完全描述三维空间中随机波浪的性质, 还需要考虑波浪传播方向的空间分布。因此, 将频谱 $S(\omega)$ 与方向分布函数 $D(\theta')$ 相乘获得方向谱, 并应用于生成三维随机波浪:

$$S(\omega, \theta') = S(\omega)D(\theta') \quad (32)$$

式中: θ' 为分量波的扩散方向角。本文使用以下方向分布函数:

$$D(\theta') = \frac{\Gamma(s+1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(s+1/2)} \cos^{2s} \left(\frac{\theta' - \theta'_0}{2} \right) \quad (33)$$

式中: θ'_0 为随机波扩散的主方向角, 在本研究中取为 0, 即主扩散方向沿 x 轴正向; Γ 为伽马函数; s 为扩散因子, 本文取为 15。

在三维空间中随时空变化的随机波面高程可表示为

$$\eta(x, y, t) = \sum_{i=1}^{M_w} \sum_{j=1}^{N_w} a_{ij} \cos(k_i x \cos \theta'_j + k_i y \sin \theta'_j - \omega_i t + \varepsilon_{ij}) \quad (34)$$

式中: M_w 和 N_w 分别为分量频率和方向角的数量, 其必须足够大以保证模拟的精度; ω_i 和 θ'_j 分别为分量波的频率和方向角; ε_{ij} 为在 $(0, 2\pi)$ 范围内随机分布的初始相位角; 分量波的波数 k_i 由波散函数确定; a_{ij} 为分量波的波幅, 可以通过以下公式计算:

$$a_{ij} = \sqrt{2S(\omega, \theta')d\omega d\theta'} \quad (35)$$

获得了随机波高方程后, 作用于海床表面的随机波浪水动力压力 P_{ran} 可表示为

$$P_{\text{ran}}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{M_w} \sum_{j=1}^{N_w} \frac{\gamma_w a_{ij}}{\cosh k_i d} \cos(k_i x \cos \theta'_j + k_i y \sin \theta'_j - \omega_i t + \varepsilon_{ij}) \quad (36)$$

为了进行随机波浪和相应规则波浪作用下海床响应的对比研究, 应确定与随机波浪对应的规则波浪的参数。Sumer 等^[30]根据试验测量结果, 就随机波和相应的规则波之间的波高和周期提出了以下关系:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= H_s / \sqrt{2} \\ T_r &= T_m = 2\pi \sqrt{m_0 / m_4} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

式中: H_r 为相应规则波的波高; T_r 为规则波的周期, 假设其等于随机波的平均跨零周期 T_m ; m_n 为第 n 个谱矩, 可以表示为

$$m_n = \int_0^\infty \omega^n S(\omega) d\omega \quad (38)$$

对于规则的三维短峰波, 作用在海床表面的水动力压力表示为

$$P_{\text{reg}}(x, y, t) = \frac{\gamma_w H_r}{2 \cosh k_r d} \cos(n_\zeta k_r y) \cos(m_\zeta k_r x - \omega_r t) \quad (39)$$

式中: $n_\zeta = \cos \zeta$, $m_\zeta = \sin \zeta$, ζ 为入射角; k_r 和 ω_r 分别为规则波的波数和频率。使用上述波浪谱由参数 $H_s = 6$ m, $T_p = 12$ s, $\gamma = 3.3$ 和 $\theta'_0 = 0^\circ$ 产生的随机波浪如图 11 所示。

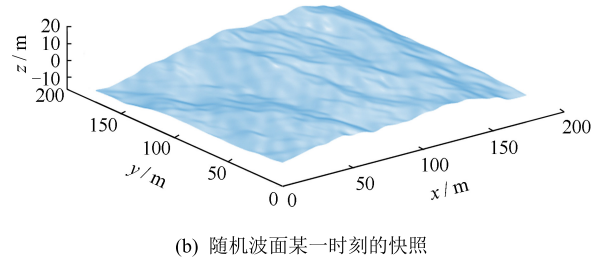
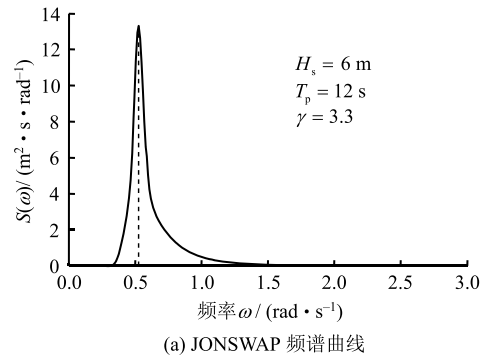


图 11 三维随机波浪生成示意图

Fig.11 An illustration of 3D random wave generation

4.2 三维空间异质海床

第 3.2 节中的二维数值研究以及文献[19-20]都表明, 土体剪切模量的空间变异性对波致海床响应的影响远大于渗透系数和其他参数的空间变异性。因此, 在本节中仅考虑剪切模量 G 的空间变异性, 并假定其遵循对数正态分布。使用平方指数自相关函数进行随机场的离散。用于生成土体剪切模量随机场的参数列于表 3。由第 2.2 节中分解的 K-L 展开方法获得的随机场的一次实现及其平行于 x - z 平面的切面图如图 12 所示。

表 3 用于生成土体剪切模量随机场的参数

Table 3 Parameters used for the generation of random fields of G

均值 μ_G / Pa	变异系数 COV _G	水平相关距离 $l_x = l_y$ / m	垂直相关距离 l_z / m
5.0×10^7	0.3	30	3

4.3 海床响应统计分析

本节案例中生成海床三维随机有限元模型的参数列于表 4。进行 500 次抽样的 MCS，以探究规则波和随机波荷载作用下空间异质海床的响应规律。由 Fenton 等^[31]的研究可知，在 MCS 中以置信

度 $(1-\alpha)$ 对均值在误差 e 内进行估计，则所需抽样次数 N_{mcs} 为

$$N_{\text{mcs}} \approx \left(\frac{z_{\alpha/2} \sigma^*}{e} \right)^2 \quad (40)$$

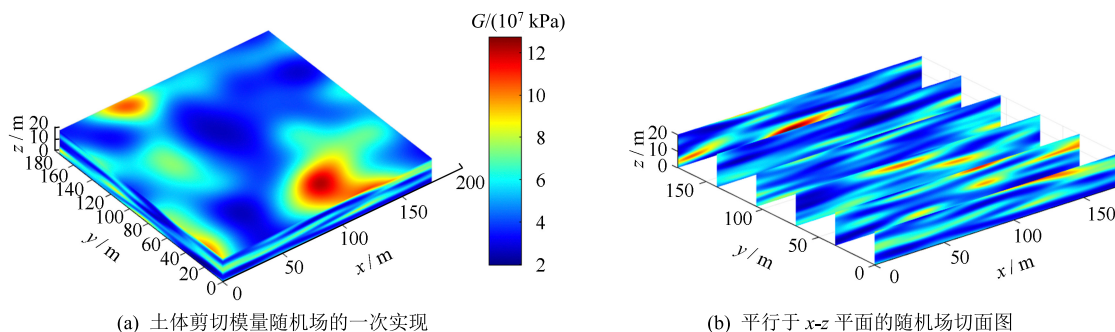


图 12 使用分解程序进行的三维随机场的一次实现

Fig.12 One generation of 3D random field using decomposing procedure

表 4 随机有限元模型中使用的参数

Table 4 Parameters used in stochastic finite element models

随机波		对应规则波					多孔海床					
有效波高	谱峰周期	波高	周期	波长	入射角	水深	海床厚度	孔隙率 n'	泊松比 μ	剪切模量(均值)	饱和度	渗透率 K
H_s/m	T_p/s	H_r/m	T_r/s	L_r/m	$\zeta/(\circ)$	d/m	h/m			G/Pa	S_r	$/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
6	12	4.24	9.50	134.15	45	40	20.0	0.4	0.4	5.0×10^7	0.985	10^{-5}

式中： $z_{\alpha/2}$ 为标准正态分布累积概率为 $(1-\alpha/2)$ 时对应的变量取值（例如当 $\alpha=0.05$ ，即置信度为 95% 时，标准正态分布累积概率为 0.975，对应 $z_{\alpha/2} \approx 1.96$ ）。因此，如果在 95% 置信度下对参数均值估计的最大允许误差 e 取为 $0.09 \sigma^*$ ，则由式 (40) 计算所需抽样次数约为 475。因此，本研究 500 次抽样的 MCS 足以保障分析的精度。

MCS 获得的最大孔隙水压力 $|p|_{\text{max}}$ 及剪应力 $|\tau_{xy}|_{\text{max}}$ 如图 13 所示。图中同时标注了确定性分析的结果，即在规则波浪荷载作用下均质海床的响应。从图中可以看出，确定性分析获得的 $|p|_{\text{max}}$ 小于空间异质海床的平均值，这表明忽略 G 的空间变异性的确定性分析会低估海床中的孔压。一般来说，确定性模型获得的响应与概率模型平均值之间的差异问题没有普适结论，特别是对于处理水在空间随机非均质多孔介质中流动的问题。该问题的结果取决于一系列复杂的因素，包括响应类型、流动问题的特点以及参数空间变异性。但是对于空间异质海床中孔压的分析，本文与其他研究者得出的结论一致^[19-20]，即忽略 G 的空间变异性的确定性分析会低估海床中的孔隙水压力。此外，研究还表明，若不考虑波浪荷载的随机性，则海床动力响应值将在很大程度上被低估，因为从图 13 可以清楚地看出，随机波浪作

用下的空间异质海床中土体最大响应的平均值要大于规则波浪荷载作用下的最大响应平均值，且随机波作用下的海床响应具有更大的不确定性。

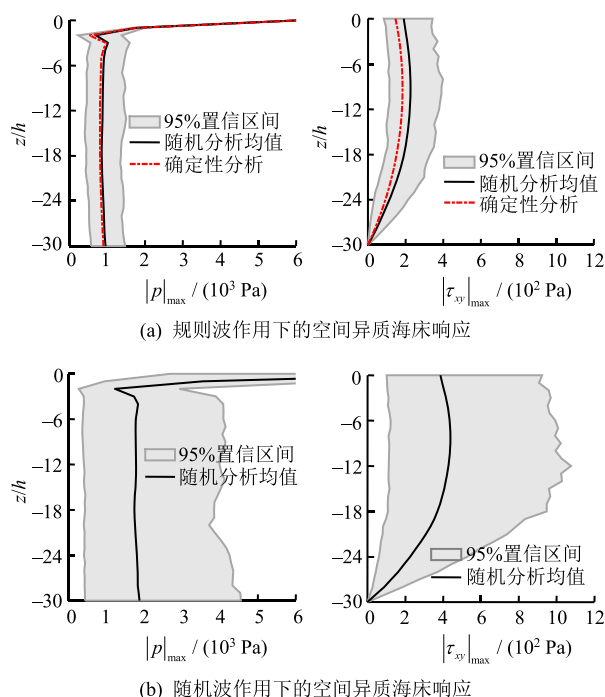


图 13 空间异质海床响应统计规律

Fig.13 Statistics of the responses in spatially random seabed

本文还研究了空间异质海床中瞬时液化深度的统计特征。图 14 分别显示了由 MCS 得到的规则和随机波作用下空间异质海床中液化深度的统计直方图。可以看出, 随机波荷载作用下的空间异质海床中瞬时液化深度均值 (1.919 m) 远大于规则波浪荷载作用下的液化深度均值 (0.986 m)。随机波荷载作用下的液化深度分布相比于规则波浪荷载具有更大的不确定性。因为考虑波浪随机性后, 液化深度统计数据的 COV 由 0.037 变为 0.466。

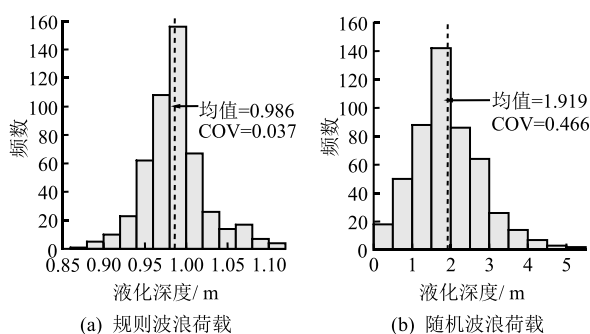


图 14 空间异质海床中液化深度统计直方图
Fig.14 Histograms of liquefaction depth in spatially random seabed

5 结 论

本文建立了基于随机有限元的概率分析框架, 研究了二维和三维空间异质海床中波致响应规律。主要得出以下结论:

(1) 本文提出分解的 K-L 展开方法在随机场生成中可以很好地再现空间参数的统计特征和自相关结构, 且与传统 K-L 展开方法相比, 本文方法显著减少了计算耗时和计算机物理内存占用, 使得三维随机场的离散更加高效, 同时使得高分辨率、大尺寸的多维随机场的模拟成为可能。

(2) 海床土体渗透系数 K 的空间变异性对多孔弹性海床响应概率分析结果影响有限, 仅影响浅层土体中的响应。海床响应的统计结果主要取决于土体剪切模量 G 的空间变异性。如果忽略 G 的空间变异性, 会低估波浪荷载下海床中产生的孔隙水压力。

(3) 随机波浪荷载作用下的海床响应与瞬时液化区深度的平均值和不确定性都要比规则波浪荷载作用下获得的结果大得多。因此, 基于规则波浪荷载模型的传统方法会低估液化深度, 并导致不安全的工程设计。

参 考 文 献

- [1] SAM SMITH A W, GORDON A D. Large breakwater toe failures[J]. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 1984, 110(2): 307-308.
- [2] 王立忠, 潘冬子, 潘存鸿, 等. 波浪对海床作用的试验研究[J]. *土木工程学报*, 2007, 40(9): 101-109.
WANG Li-zhong, PAN Dong-zi, PAN Cun-hong, et al. Experimental investigation on wave-induced response of seabed[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2007, 40(9): 101-109.
- [3] ZEN K, YAMAZAKI H. Mechanism of wave-induced liquefaction and densification in seabed[J]. *Soils and Foundations*, 1990, 30(4): 90-104.
- [4] TSUI Y, HELFRICH S C. Wave-induced pore pressures in submerged sand layer[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1983, 109(4): 603-618.
- [5] 余波, 丰土根, 熊中华. 波浪荷载下海床稳定性的总应力法分析[J]. *岩土工程学报*, 2014, 36(5): 905-909.
YU Bo, FENG Tu-gen, XIONG Zhong-hua. Total stress approach for stability of seabed under wave loads[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2014, 36(5): 905-909.
- [6] YAMAMOTO T, KONING H L, SELMEIJER H, et al. On the response of a poro-elastic bed to water waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1978, 87(1): 193-206.
- [7] HSU J R C, JENG D S. Wave-induced soil response in an unsaturated anisotropic seabed of finite thickness[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1994, 18(11): 785-807.
- [8] 王栋, 栾茂田, 郭莹. 波浪作用下海床动力反应有限元数值模拟与液化分析[J]. *大连理工大学学报*, 2001, 41(2): 216-222.
WANG Dong, LUAN Mao-tian, GUO Ying. FEM-based numerical simulation of dynamic response and liquefaction analysis of seabed under wave-induced loading[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2001, 41(2): 216-222.
- [9] 吴梦喜, 楼志刚. 波浪作用下海床的稳定性与液化分析[J]. *工程力学*, 2002, 19(5): 97-102.
WU Meng-xi, LOU Zhi-gang. Stability and liquefaction analysis of seabed to wave loading[J]. *Engineering Mechanics*, 2002, 19(5): 97-102.
- [10] MADSEN O S. Wave-Induced pore pressures and effective stresses in a porous bed[J]. *Géotechnique*, 1978, 28(4): 377-393.
- [11] 刘红军, 张民生, 贾永刚, 等. 波浪导致的海床边坡稳定性分析[J]. *岩土力学*, 2006, 27(6): 986-990.
LIU Hong-jun, ZHANG Min-sheng, JIA Yong-gang, et al. Analysis of seabed stability under wave loading[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2006, 27(6): 986-990.
- [12] 周晓智, 陈育民, 刘汉龙. 驻波作用下有限厚度海床动

- 应力路径特性研究[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(5): 890-899.
- ZHOU Xiao-zhi, CHEN Yu-min, LIU Han-long. Study on characteristics of dynamic stress path of finite-thickness seabed under standing waves[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2018, 40(5): 890-899.
- [13] RAFIEI A, RAHMAN M S, GABR M A. Coupled analysis for response and instability of sloping seabed under wave action[J]. **Applied Ocean Research**, 2019, 88: 99-110.
- [14] LIU H, JENG D S. A semi-analytical solution for random wave-induced soil response and seabed liquefaction in marine sediments[J]. **Ocean Engineering**, 2007, 34: 1211-1224.
- [15] 王小雯, 张建民. 随机波浪作用下饱和砂质海床弹塑性动力响应规律[J]. 工程力学, 2018, 35(6): 240-248.
- WANG Xiao-wen, ZHANG Jian-min. Elasto-plastic dynamic behaviors of saturated sandy seabed under random waves[J]. **Engineering Mechanics**, 2018, 35(6): 240-248.
- [16] ZHANG C, SUI T, ZHENG J, et al. Modelling wave-induced 3D non-homogeneous seabed response[J]. **Applied Ocean Research**, 2016, 61: 101-114.
- [17] 蒋水华, 刘源, 章浩龙, 等. 先验概率分布及似然函数模型的选择对边坡可靠度评价影响的定量评估[J]. 岩土力学, 2020, 41(9): 3087-3097.
- JIANG Shui-hua, LIU Yuan, ZHANG Hao-long, et al. Quantitatively evaluating the effects of prior probability distribution and likelihood function models on slope reliability assessment[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2020, 41(9): 3087-3097.
- [18] 仇文岗, 王琦, 陈福勇, 等. 考虑掩体空间变异性的边坡可靠度分析及抗滑桩随机响应研究[J]. 岩土力学, 2021, 42(11): 3157-3168.
- ZHANG Wen-gang, WANG Qi, CHEN Fu-yong, et al. Reliability analysis of slope and random response of anti-sliding pile considering spatial variability of rock mass properties[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2021, 42(11): 3157-3168.
- [19] ZHANG L L, CHENG Y, Li J H, et al. Wave-induced oscillatory response in a randomly heterogeneous porous seabed[J]. **Ocean Engineering**, 2016, 111: 116-127.
- [20] PENG X Y, ZHANG L L, JENG D S, et al. Effects of cross-correlated multiple spatially random soil properties on wave-induced oscillatory seabed response[J]. **Applied Ocean Research**, 2017, 62: 57-69.
- [21] 刘勇, 李福豪, 陈健, 等. 深层搅拌水泥土基底加固层的三维随机有限元分析[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(8): 1542-1548.
- LIU Yong, LEE Fook-hou, CHEN Elton J, et al. Three-dimensional random finite element analysis of cement-admixed soil slab for stabilization of foundation pits[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2018, 40(8): 1542-1548.
- [22] GHIOCEL D M, GHANEM R G. Stochastic finite-element analysis of seismic soil-structure interaction[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2002, 128(1): 66-77.
- [23] 蒋水华, 曾绍慧, 杨建华, 等. 不排水抗剪强度非平稳随机场模拟及边坡可靠度分析[J]. 岩土力学, 2018, 39(3): 1071-1081.
- JIANG Shui-hua, ZHENG Shao-hui, YANG Jian-hua, et al. Slope reliability analysis by simulation of non-stationary random field of undrained shear strength[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2018, 39(3): 1071-1081.
- [24] JIANG S H, HUANG J. Modeling of non-stationary random field of undrained shear strength of soil for slope reliability analysis[J]. **Soils and Foundations**, 2018, 58(1): 185-198.
- [25] LI D Q, XIAO T, ZHANG L M, et al. Stepwise covariance matrix decomposition for efficient simulation of multivariate large-scale three-dimensional random fields[J]. **Applied Mathematical Modelling**, 2019, 68: 169-181.
- [26] COMSOL Co. Ltd. LiveLink for MATLAB user's guide COMSOL Multiphysics® V.6.0. COMSOL AB[S]. Stockholm: COMSOL Co., Ltd. 2021.
- [27] LAI Z, CHEN Q, WANG C, et al. Modeling dynamic responses of heterogeneous seabed with embedded pipeline through multiresolution random field and coupled hydromechanical simulations[J]. **Ocean Engineering**, 2019, 173: 556-570.
- [28] PHOON K K, KULHAWY F H. Characterization of geotechnical variability[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1999, 36(4): 612-624.
- [29] GODA Y. Statistical variability of sea state parameters as a function of wave spectrum[J]. **Coastal Engineering in Japan**, 1988, 31(1): 39-52.
- [30] SUMER B M, FREDSE J, CHRISTENSEN S, et al. Sinking/floatation of pipelines and other objects in liquefied soil under waves[J]. **Coastal Engineering**, 1999, 38(2): 53-90.
- [31] FENTON G A, GRIFFITHS D V. Risk Assessment in geotechnical engineering[M]. Hoboken: Wiley, 2008.